

11. Вполне непрерывные операторы, вполне непрерывность сопряженного оператора, компактные операторы, эквивалентность компактности и вполне непрерывности оператора,

Обозн: $\rightarrow$ — слабая сх-ть //

Ytb If $x_n \rightarrow x, A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H), Q(A) = H$, then $Ax_n \rightarrow Ax$.
 $\nabla x_n \rightarrow x. \nexists (Ax_n, y) = h, A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H), Q(A) = H \nexists ! A^* \} =$
 $= (x_n, A^* y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, A^* y) = (Ax, y), \forall y \in H \Rightarrow h \text{ no onp-nuro} \} \Rightarrow$
 $\Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax \blacksquare$

Оп-р $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$ наз-ся **вполне непр.**, if $\forall \{x_n\}: x_n \rightarrow x \Rightarrow \|Ax_n - Ax\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

If A - вполне непр. op-r, то A^* - тоже вполне непр.
 $\triangle \int x_n \rightarrow x \nRightarrow \|A^* x_n - A^* x\|^2 = (A^*(x_n - x), A^*(x_n - x)) =$
 $= (AA^*(x_n - x), x_n - x) \leq \{K \cdot \delta\} \leq \|AA^*(x_n - x)\| \|x_n - x\| \leq \eta$ всякая
 слабо с-ая посл-ть op- $\} \leq C \|AA^*(x_n - x)\|$
 $x_n - x \rightarrow 0 \Rightarrow A^*(x_n - x) \rightarrow 0$ (по 17б)
 A - вполне непр $\Rightarrow \|A(A^*(x_n - x))\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \|A^* x_n - A^* x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Оп-р $f \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$ наз-ся **компактным**, if он $\neq$ огранич.
сн-во переводит в предкомпактные.

$\nabla \exists f \in L(H \rightarrow H)$. Тогда A -вложение непр. $\Leftrightarrow A$ -компактный

$\Rightarrow \exists A$ - вполне непр. $\neq$ произвол. опр. посл-во $\{x_n\}$.
 Воспольз-ся след. св-вом: в сепараб. метр. пр-ве из опр.
 посл-ва можно выделить слабо сходящее к x посл-во. Достичем
 такую $\{x_n\}$ как $\{x_n\}$. $\exists x_n \rightarrow x$
 A - вполне непр $\Rightarrow \|Ax_n - x\| \rightarrow 0$. Посл-во $\{x_n\}$ св-ся
 фунда. $\Rightarrow A$ - компакт. оп-р
 $\Rightarrow \exists A$ - компактн. $\exists \exists \{x_n\} \rightarrow x$.

Итак, мы имеем, что $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ и $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ (т.е. $\|A_n - A\| \rightarrow 0$).

$$\exists \varepsilon > 0: \|Ax_n - Ax\| \geq \varepsilon, \forall n$$

Всякая σ -сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ — с.р. $\Rightarrow \{x_n\}$ — с.р. $\Rightarrow \{x_n\}$ — компактно $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{A_{nk}\} - \text{н/р-ком-п-нт.}$ пош-то $\Rightarrow$ из нее можно выделить с-цу н/р-ком-п-нт.

$$\mathbb{E} \{ \text{Lnke} \} = 1 \text{ Lnke} - y \text{ } \overrightarrow{1 \rightarrow 0}$$

Всаклет $\text{ker } \varphi$ φ - пр-ор. $\Rightarrow$ φ невозм. снатох-а ноч-е в снатох-а: $\varphi: X \rightarrow Y \Rightarrow \varphi: X \rightarrow Y, \varphi(x) = y \Rightarrow \varphi(x) = y; \text{и}$

Sei also $x \in \mathbb{R}^n$! $\Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow \|Ax_k - Ax\| \rightarrow 0$: $\mathbb{R}^n$ ist
komplett $\|Ax_k - Ax\| \geq \epsilon$!? $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ ist kompakt. ■